Übungsblatt 6 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Einsetzen in die Gleichungen von unten nach oben liefert:

$x_4: \quad x_4 = 0$

$x_3: \quad 2x_3 + 8x_4 = 20 => 2x_3 = 20 => x_3 = 10$

$x_2: \quad 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 => 3x_2 + 30 + 0 = 0$

$=> 3x_2 = -30 => x_2 = -10$

$x_1: \quad 2x_1 + x_4 = 12 => 2x_1 = 12 => x_1 = 6$

Die Lösungsmenge besteht aus dem Vektor

x=(6,-10,10,0)

Aufgabe 2

a.) Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn y=0 gilt (-> Teil b.).

Wenn $y \neq 0$ gilt, ist die letzte Gleichung und damit das gesamte Gleichungssystem nicht lösbar.

b.) Einsetzen der Variablen in der Reihenfolge $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ liefert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 6\lambda_3 + 6\lambda_2 + 1,5\lambda_1 \\ 5 - 3\lambda_3 + 4\lambda_2 - 1,5\lambda_1 \\ \lambda_3 \\ 5 - 3\lambda_2 - 0,5\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Nebenrechnung:</u>

$x_6: \quad x_6 = \lambda_1$

$x_5: \quad x_5 = \lambda_2$

$x_4: \quad 2x_4 + 6x_5 + x_6 = 10 => 2x_4 = 10 - 6\lambda_2 - \lambda_1$

$=> x_4 = 5 - 3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1$

$x_3: \quad x_3 = \lambda_3$

$x_2: \quad x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 10$

$=> x_2 + 3\lambda_3 + 5 - 3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_1 = 10$

$=> x_2 + 3\lambda_3 + 5 - 4\lambda_2 + 1,5\lambda_1 = 10$

$=> x_2 = 5 - 3\lambda_3 + 4\lambda_2 - 1,5\lambda_1$

$x_1: \quad -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 + 5x_6 = 10$

$$=> -x_1 + \underbrace{10 - 6\lambda_3 + 8\lambda_2 - 3\lambda_1}_{2x_2} + \underbrace{5 - 3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1}_{x_4} + \lambda_2 + 5\lambda_1 = 10$$

$=> -x_1 + 5 - 6\lambda_3 + 6\lambda 2 + 1,5\lambda_1 = 0$

$=> x_1 = 5 - 6\lambda_3 + 6\lambda_2 + 1,5\lambda_1$

Aufgabe 3

a.)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
-6	-3	-5	-10	4	-9
2	1	4	8	10	16

b.)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
-6	-3	-5	-10	4	-9
2	1	4	8	10	16

addiere 3-faches der ersten Zeile zur zweiten Zeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
0	0	1	2	4	3
2	1	4	8	10	16

addiere -1-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
0	0	1	2	4	3
0	0	2	4	10	12

addiere -2-faches der zweiten Zeile zur dritten Zeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
0	0	1	2	4	3
0	0	0	0	2	6

Jetzt liegt das LGS in Zeilenstufenform vor, und die Koeffizienten der Lösungsvektoren werden in der Reihenfolge x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 ermittelt. Man erhält:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -9 - 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \{(11, 0, -9, 0, 3) + \lambda_1(0, 0, -2, 1, 0) + \lambda_2(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0) \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

<u>Nebenrechnung:</u>

Berechnung x_5: 3-te Gleichung: $2 \cdot x_5 = 6$

$\Rightarrow x_5 = 3$

Berechnung x_4: Frei wählbar, setze $x_4 = \lambda_1$

Berechnung x_3: 2-te Gleichung: $x_3 + 2 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 3$

$\Rightarrow x_3 + 2\lambda_1 + 4 \cdot 3 = 3 \Rightarrow x_3 = -9 - 2\lambda_1$

Berechnung x_2: Frei wählbar, setze $x_2 = \lambda_2$

Berechnung x_1: 1-te Gleichung: $2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 4$

$\Rightarrow 2x_1 + \lambda_2 + 2 \cdot (-9 - 2\lambda_1) + 4\lambda_1 = 4$

$\Rightarrow 2x_1 + \lambda_2 - 18 - 4\lambda_1 + 4\lambda_1 = 4$

$\Rightarrow x_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - 9 = 2$

$\Rightarrow x_1 = 11 - \frac{1}{2}\lambda_2$

c.)

I.) Erster Teil der Probe.
Probe mit dem LGS, ob der nicht parametrisierte Vektor das LGS erfüllt.
$(11, 0, -9, 0, 3) \Rightarrow x_1 = 11, x_2 = 0, x_3 = -9, x_4 = 0, x_5 = 3$

I.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 2 \cdot 11 + 0 + 2 \cdot (-9) + 0 &= 4 \\ 22 - 18 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

II.)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 + 4x_5 &= -9 \\ -6 \cdot 11 - 0 - 5 \cdot -9 - 0 + 4 \cdot 3 &= -9 \\ -66 + 45 + 12 &= -9 \\ -9 &= -9 \end{aligned}$$

III.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 10x_5 &= 16 \\ 2 \cdot 11 + 0 + 4 \cdot (-9) + 0 + 10 \cdot 3 &= 16 \\ 22 - 36 + 30 &= 16 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

Das LGS wird durch den nicht parametrisierten Vektor erfüllt.
Erster Teil der Probe ist erfüllt.

Zweiter Teil der Probe.
Probe mit dem LGS, ob die parametrisierten Vektoren das zugehörige homogene LGS erfüllen.
1. Fall: $\lambda_1(0,0,-2,1,0) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = 1, x_5 = 0$

I.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 0 + 0 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 &= 0 \\ -4 + 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

II.)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 0 - 0 - 5 \cdot -2 - 10 \cdot 1 + 0 &= 0 \\ 10 - 10 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

III.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 0 + 0 + 4 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 0 &= 0 \\ -8 + 8 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

2. Fall: $\lambda_2(-\frac{1}{2},1,0,0,0) \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$

I.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2 \cdot -\frac{1}{2} + 1 + 0 + 0 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

II.)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 + 4x_5 &= 0 \\ -6 \cdot -\frac{1}{2} - 3 \cdot 1 - 0 - 0 + 0 &= 0 \\ 3 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

III.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 2 \cdot -\frac{1}{2} + 1 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Das zu gehörige homogene LGS wird durch die parametrisierten Lösungsvektoren erfüllt.
Damit ist auch der zweite Teil der Probe korrekt und d.h. das Ergebnis des LGS ist korrekt.

d.) Die Dimension der Lösungsmenge ist 2, da zwei parametrisierte Vektoren im Lösungsraum vorkommen (zwei unterschiedliche λ).
Da das Gleichungssystem fünf Unbekannte hat, ist der Rang 5-2 = 3.

Aufgabe 4

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & \beta + 3\alpha & 1 \\ -2 & 2\beta - 2\alpha & \alpha \end{array}$$

subtrahiere 3-faches der ersten Zeile von der zweiten Zeile

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta & -2 \\ -2 & 2\beta - 2\alpha & \alpha \end{array}$$

addiere 2-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta & -2 \\ 0 & 2\beta & \alpha + 2 \end{array}$$

subtrahiere 2-faches der zweiten Zeile von der dritten Zeile

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta & -2 \\ 0 & 0 & \alpha + 6 \end{array}$$

Allgemein ist ein LGS in Zeilenstufenform genau dann lösbar, wenn für jede Nullzeile auf der linken Seite auch rechts eine Null steht. Das vorliegende LGS ist also genau dann lösbar, wenn zugleich erfüllt ist:

i.) $\alpha + 6 = 0$, d.h. $\alpha = -6$, und

ii.) $\beta \neq 0$.

Im Falle der Lösbarkeit hat das LGS also die Form

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & \beta & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

In diesem Fall erhält man durch Rückwärts-Einsetzen die Lösung $(x_1, x_2) = (1 - \frac{12}{\beta}, -\frac{2}{\beta})$:

i.) $\beta x_2 = -2 \Longrightarrow x_2 = -\frac{2}{\beta}$,

ii.) $x_1 - 6x_2 = 1 \Longrightarrow x_1 = 1 + 6x_2 = 1 - \frac{12}{\beta}$.

Aufgabe 5

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\\2 & -5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\\2 & -5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\\2 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10\\13\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\\2 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10\\13\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7a-7\\-7b\\49\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}17-7a\\13+7b\\-43\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 5\\9 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\0 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}\qquad\text{geht nicht!}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}\qquad\text{geht nicht!}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\0 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 5\\-4 & 7\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 2\\0 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 10\\3 & 0\\0 & -6\end{pmatrix}$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 2\\0 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 4 & 1\\1 & 2 & 3\\-8 & 2 & 6\end{pmatrix}$$